Glava 1: Matematički podsetnik: Vektorska analiza

U okviru ove glave nevedeni su samo neki osnovni pojmovi i obrazci iz vektorske analize, neki bez detalja dokaza, u obliku koji će nam biti od posebnog interesa u daljem izlaganju osnova klasične elektrodinamike (za više detalja videti udžbenik Đ. Mušicki i B. Milić: *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga, Beograd 1975).

1. Skalarno polje. Gradijent skalarne funkcije

Ako svakoj tački neke oblasti prostora odgovara izvesna određena vrednost nekog skalara

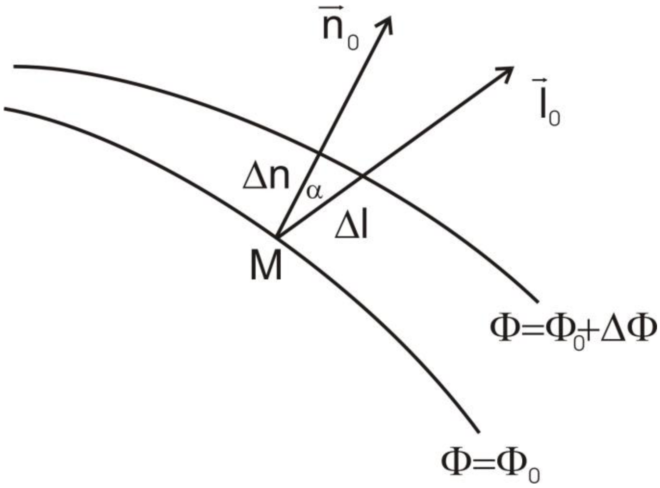
$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \Phi(\mathbf{r}), \tag{1}$$

kažemo da postoji *skalarno polje*. Na primer temperatura u nekoj oblasti je određena funkcija položaja $T(x_1, x_2, x_3)$ i karakteriše posmatrano polje temperature. Pošto skup (x_1, x_2, x_3) predstavlja vektor položaja, funkcija (1) može se posmatrati i kao skalarna funkcija vektorskog argumenta $\mathbf{r}$. Stavimo li $\Phi = \Phi_0$, gde je Φ_0 neka konstanta, $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_0$, dobićemo geometrijsko mesto tačaka u kojima Φ ima istu vrednost Φ_0; to je obično površ i naziva se *ekviskalarna površ*.

Definicija gradijenta. Posmatrajmo sada dve vrlo bliske ekviskalarne površi, koje odgovaraju vrednostima Φ_0 i $\Phi_0 + \Delta\Phi$ i uočimo na prvoj površi neku tačku *M* (Slika 1). Ako se iz nje pomerimo duž proizvoljnog pravca jediničnog vektora $\mathbf{l}_0$ do druge površi za Δl, onda se granična vrednost

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta l} \tag{2}$$

naziva *izvod skalara Φ u datom pravcu* $\mathbf{l}_0$.



SLIKA 1: Uz definiciju gradijenta

Brzina promene skalara u datom pravcu bitno zavisi od samog pravca i najveća je u pravcu normale na ekviskalarnu površ. Orijentišimo ovu površ tako da je njen jedinični vektor normale $\mathbf{n}_0$ usmeren ka ekviskalarnoj površi $\Phi = \Phi + |\Delta\Phi|$, tj. u smeru rašćenja skalara.

Vektor čiji je intenzitet $\partial\Phi / \partial n$, a ima pravac i smer jediničnog vektora $\mathbf{n}_0$ naziva se *gradijent sklarne funkcije* Φ *u tački M* i označava se sa

$$grad\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\mathbf{n}_0 \tag{3}$$

a takođe i simbolom $\partial\Phi / \partial\mathbf{r}$.

Gradijent je, dakle *vektor čiji intenzitet predstavlja najveću promenu posmatrane skalarne funkcije po jedinici dužine, ima pravac normale na ekviskalarnu površ u toj tački, a orijentisan je u smeru rašćenja ove skalarne funkcije.*

Iz same definicije se, dalje, vidi da je *vrednost gradijenta nezavisna od koordinatnog sistema.*

Analitički oblik gradijenta je

$$grad\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i, \quad (i = 1,2,3)$$

pri čemu je upotrebljena sumaciona konvencija. Gradijent se može prikazati i simbolički izrazom

$$grad\Phi = \nabla\Phi ,$$

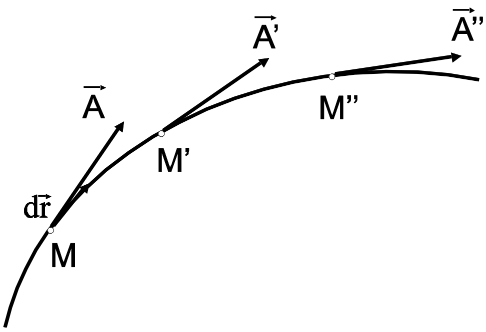
gde simbol $\nabla = \left(\partial / \partial x_i\right)\mathbf{e}_i$ se naziva *Hamiltonov operator (i simbolički vektor)* .

2. Vektorsko polje. Divergencija

Ako svakoj tački neke određene oblasti prostora odgovara određeni vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

time je definisano *vektorsko polje*, a $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ *predstavlja vektorsku funkciju vektorskog argumenta* $\mathbf{r}$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Na primer, jačina električnog polja u nekoj tački oblasti je funkcija položaja $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ koja određuje posmatrano polje (napomena: ovaj izraz ne treba brkati sa pojmom intenziteta električnog polja E). Linije koje imaju tu osobinu da u svakoj njihovoj tački vektor $\mathbf{A}$ ima pravac tangente nazivaju se *vektorske linije* tog polja (Slika 2).



SLIKA 2: Vektorske linije polja

Jednačine ovih linija možemo dobiti polazeći od kolinearnosti vektora $d\mathbf{r}$ i $\mathbf{A}$ u tački *M*

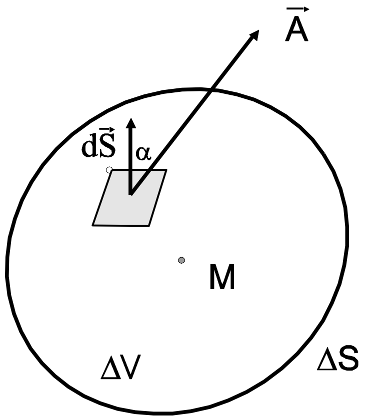
$$d\mathbf{r} = k\,\mathbf{A}$$

odakle sledi proporcionalnost odgovarajućih komponenti

$$\frac{dx_1}{A_x(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{A_y(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{A_z(x_1, x_2, x_3)}$$

što predstavlja diferencijalne jednačine ovih linija.

Definicija divergencije. Uočimo neku tačku M u vektorskom polju i oko nje ma kakvu malu zatvorenu površ ΔS , koja obuhvata zapreminu ΔV (Slika 3).



SLIKA 3: Uz definiciju divergencije

Formirajmo površinski integral $\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, a zatim graničnu vrednost količnika ovog integrala i obuhvaćene zapremine ΔV kad ova zapremina na proizvoljan način teži nuli, skupljajući se u tačku M. Ako ona postoji i ne zavisi od načina kako ΔV teži nuli, ova granična vrednost se naziva <u>*divergencija vektorske funkcije*</u> $\mathbf{A}$ u tački M.

$$div\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} . \qquad (4)$$

Prema samoj definiciji vidi se da je vrednost divergencije *nezavisna od koordinatnog sistema,* te je invarijantna u odnosu na ma kakvu transformaciju koordinata, a takođe *ne zavisi ni od oblika površi* ΔS, pa možemo uvek uzeti takvu površ koja nam je u datom slučaju najpogodnija.

Fizička interpretacija divergencije. Uvedimo najpre *konvenciju o broju vektorskih linija:* kroz jedinicu površine normalno postavljene na linije vektora $\mathbf{A}$ uzima se toliko vektroskih linija orijentisanih u smeru vektora $\mathbf{A}$ koliki je intenzitet ovog vektora (u izabranom sistemu jedinica) na tom mestu. Tada kroz element površi dS prolazi isto toliko vektorskih linija koliko i kroz normalno postavljenu površ $dS\cos\alpha$, tj.

$$A \cdot dS\cos\alpha = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} .$$

Broj vektorskih linija kroz površ S biće tada

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

i naziva se *fluks vektora* $\mathbf{A}$ *kroz površ* S. Pri tome element fluksa $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ je pozitivan ako vektor $\mathbf{A}$ na tom mestu zaklapa oštar ugao sa spoljnom normalom, tj. ako vektorske linije tu izlaze iz te površi *S*, a negativan u suprotnom slučaju.

Na osnovu definicije divergencije vidimo da je *divergencija neke vektorske funkcije u datoj tački predstavlja fluks tog vektora kroz ma kakvu malu zatvorenu površ oko te tačke po jedinici obuhvaćene zapremine.*

Ako je u nekoj tački $div\mathbf{A} > 0$, biće više vektorskih linija koje izlaze iz te površi nego što ulaze, a ako je $div\mathbf{A} < 0$ biće obrnuto. Zaključujemo: *u tačkama u kojima je* $div\mathbf{A} > 0$ *postoje izvori, a gde je* $div\mathbf{A} < 0$ *ponori vektorskih linija, a sama vrednost divergencje daje nam meru izdašnosti izvora ili ponora po jedinici zapremine.*

Analitički oblik divregencije. Bez navođenja detalja izvođenja analitičkog oblika divergencije[1], konačno, analitički oblik za divergenciju je:

$$div\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \tag{5}$$

što možemo napisati i sibolički pomoću *Hamiltonovog operatora* $\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$, $(i = 1,2,3)$.

$$div\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \tag{6}$$

Jednačina (6) je simbolički prikaz divergencije. U ma kojim ortogonalnim generalisanim koordinatama (q_1, q_2, q_3), *metrička forma* ima oblik

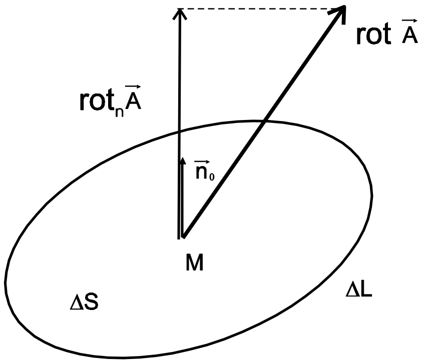
$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \tag{7}$$

divergencija ima oblik

$$div\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} A_i\right)\right] \tag{8}$$

3. Rotor vektora

Definicija rotora. Uočimo neku tačku M u vektorskom polju i iz nje povucimo jedan pravac određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_0$. Kroz tačku M postavimo neku površ, takvu da je $\mathbf{n}_0$ bude jedinični vektor njene normale u tački M, i uočimo na njoj jedni malu zatvorenu konturu ΔL koja obuhvata posmatranu tačku M i na odabranoj površi omeđuje deo čija je površ ΔS (Slika 4).



SLIKA 4: Uz definiciju rotora

Formirajmo linijski integral $\oint_{\Delta L} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ i zatim graničnu vrednost količnika ovog integrala i površine ΔS kad $\Delta S \to 0$ stežući se oko tačke M. Ako ova granična vrednost postoji i ne zavisi od načina kako ΔS teži nuli, smatraćemo je projekcijom nekog vektora na $\mathbf{n}_0$:

$$\left(rot\mathbf{A}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}. \tag{9}$$

[1]Za više detalja oko izvođenja analitičkog oblika za rotor vektorske funkcije pogledati knjigu: Đ. Mušicki, B. Milić *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga, Beograd, (1975) strana 23.

Tako definisan vektor naziva se *rotor vektorske funkcije*[2] $\mathbf{A}$ u tački M i obično se označava sa $rot\,\mathbf{A}$. Iz same definicije se vidi da je rotor *takođe nezavistan od koordinatnog sistema kao i od oblika konture ΔL i površi ΔS*.

Fizička interpretacija rotora. Da bismo istakli smisao rotora s gledišta primena u fizici, posmatrajmo jedno vektorsko polje u kome zatvorene vektorske linije postoje, pa uočimo jednu od njih, orijentišimo je u smeru vektora $\mathbf{A}$ i formirajmo duž nje linijski integral

$$\Gamma = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\,.$$

Integral ovakvog tipa naziva se *cirkulacija vektora $\mathbf{A}$ duž konture L* bez obzira da li se ova kontura poklapa sa vektorskom linijom ili ne.

Na osnovu definicije rotora (9) vidimo da *normalna komponenta rotora u datoj tački predstavlja cirkulaciju tog vektora duž ma koje male konture oko te tačke po jedinici obuhvaćene površine*.

Ako je u nekoj tački $rot\mathbf{A} \neq 0$ i ako za površ ΔS izaberemo takvu da se pravac njene normale u tački M poklapa sa pravcem $rot\mathbf{A}$, cirkulacija duž konture te površi biće maksimalna, čemu odgovara slučaj kad se kontura ΔL poklapa sa vektorskom linijom.

Odavde se može zaključiti da *oko tačaka u kojima je $rot\mathbf{A} \neq 0$ postoje zatvorene vektorske linije koje obuhvataju pravac vektora $rot\mathbf{A}$ u tim tačkama, a intenzitet rotora daje nam meru vrtložnosti ovih zatvorenih vektorskih linija po jedinici površine.*

Analitički oblik rotora. Bez navođenja detalja izvođenja[3], komponente rotora su:

$$\left(rot\mathbf{A}\right)_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3},\ \left(rot\mathbf{A}\right)_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1},\ \left(rot\mathbf{A}\right)_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tag{10}$$

što zajedno daje

$$rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

ili simbolički, pomoću Hamiltonovog operatora

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}\,. \tag{12}$$

U ma kojim ortogonalnim generalisanim koordinatama $\left(q_1, q_2, q_3\right)$ nalazimo

$$rot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

[2] U anglosaksonskoj literaturi često se upotrebljava simbol $curl\,\mathbf{A}$.

[3] Za više detalja oko izvođenja analitičkog oblika za rotor vektorske funkcije pogledati knjigu: Đ. Mušicki, B. Milić *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga, Beograd, (1975) strana 25.

4. Klasifikacija vektorskih polja

Prema vrednostima divergencije i rotora vektorska polja mogu se podeliti u četiri grupe:

1. Potencijalna ili *bezvrtložna polja*, kod kojih je u svim tačkama polja $rot\mathbf{A}=0$, a $div\mathbf{A}\neq 0$ bar u nekim tačkama.

2. Solenoidna ili *vrtložna polja*, gde je u svim tačkama $div\mathbf{A}=0$, a $rot\mathbf{A}\neq 0$ bar u nekim tačkama.

3. Laplace-ova polja, definisana time da je u svim tačkama polja $div\mathbf{A}=0$ i $rot\mathbf{A}=0$.

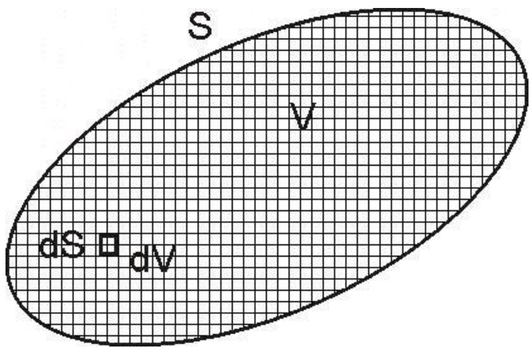
4.Složena polja, gde je bar u nekim tačkama $div\mathbf{A}\neq 0$i $rot\mathbf{A}\neq 0$. Ovakva polja uvek se mogu predstaviti kao superpozicija jednog potencijalnog i jednog vrtložnog polja.

5. INTEGRALNE TEOREME

Gaus-ova (Gauss) teorema. Za divergenciju vektorske funkcije važi *Gausova integralna teorema* o pretvaranju površinskih integrala u zapreminske, koja se sastoji u sledećem. Posmatrajmo u vektorskom polju neku zatvorenu površ S, koja obuhvata zapreminu V (Slika 5). Pretpostavimo da je u ovoj oblasti *vektorska funkcija* $\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3)$ *diferencijabilna, a njeni izvodi ograničeni*. Na osnovu definicije divergencije se dobija

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_V div\mathbf{A}\,dV \tag{14}$$

Ovo je *teorema Gaus-Ostrogradckog*, koju neki autori nazivaju i Grin-ovom (*Green) teoremom*[4], a kratkoće radi mi ćemo je u daljem izlaganju zvati prosto Gausova teorema. Ona pokazuje kako se *površinski integral po ma kojoj zatvorenoj površi može pretvoriti u zapreminski.*



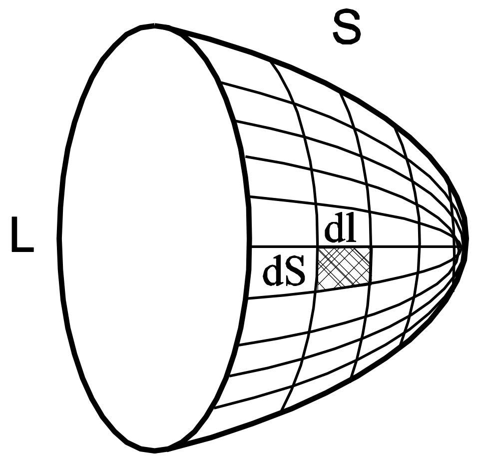
SLIKA 5: Gaus-ova teorema

[4] Ako se Gaussova teorema primeni na vektor $\mathbf{A}=\phi\, grad\,\psi$, gde su ϕ i ψ ma kakve skalarne funkcije, dobija se tzv. Greenova teorema:

$$\oint_S \phi\, grad\psi\cdot d\mathbf{S}=\int_V\left(\phi\Delta\psi+grad\,\phi\cdot grad\,\psi\right)dV \tag{15}$$

gde je Δ *Laplaceov* operator . Izmeni li se ϕ i ψ u ovoj relaciji i oduzmu li se odgovarajuće jednačine, dobija se druga Greenova teorema.

Stoks-ova (Stokes) teorema. Za rotor vektorske funkcije važi Stokes-ova teorema o pretvaranju linijskih integrala u površinske. Posmatrajmo sad neku prosto zatvorenu konturu L i neka je S ma koja površ oivičena ovom konturom (Slika 6). Pretpostavimo da je vektorska funkcija $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ diferencijabilna, a njeni prvi izvodi ograničeni u toj oblasti.



SLIKA 6: Stoks-ova teorema

Na osnovu definicije rotora dobija se

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S rot\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{16}$$

Ova teorema nam pokauje kako se *linijski integral po ma kojoj prosto zatvorenoj konturi može pretvoriti u površinski.*

6. Primena Hamilton-ovog operatora

Polazeći od analitičkog ili simboličkog prikaza gornjih veličina, možemo izvesti odgovarajuće operacije i za složenije izraze, bilo analitički bilo primenom Hamilton-ovog operatora.

Zbog svog diferencijalnog karaktera Hamiltonovog operatora, moramo ga primeniti redom na pojedine skalarne ili vektorske funkcije, koje označavamo zvezdicom, i dobijene rezultate saberemo. Potom na osnovu njegovog vektorskog karaktera svaki od dobijenih članova moramo tako transformisati da se operator ∇ nadje levo od funkcije na koju ga treba primeniti.

Gradijenti složenih izraza. Prema definiciji za *gradijent zbira dva skalara* imamo

$$\boxed{grad\left(\Phi+\Psi\right)=grad\Phi+grad\Psi}. \tag{1}$$

Gradijent proizvoda dva skalara nalazimo primenom Hamiltonovog operatora

$$\nabla\left(\Phi\Psi\right)=\nabla\left(\Phi^*\Psi\right)+\nabla\left(\Phi\Psi^*\right)=\Psi\nabla\Phi+\Phi\nabla\Psi \tag{2}$$

odnosno

$$\boxed{grad\left(\Phi\Psi\right)=\Psi\, grad\,\Phi+\Phi\, grad\,\Psi}. \tag{3}$$

Da bismo našli *gradijent skalarnog proizvoda* razvijmo izraz $\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)$ (pogledaj fusnotu) [5]

$$\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*\right)-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}^*. \tag{4}$$

Zamenom mesta $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ izlazi

$$\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=\nabla\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^*\right)-\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}^* \tag{5}$$

tako da sabiranjem dobijamo

$$\mathbf{A}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)+\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=\nabla\left(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B}\right)+\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*\right)-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}^*-\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}^*. \tag{6}$$

Pošto je

$$\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\nabla\left(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B}\right)+\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*\right) \tag{7}$$

odavde sledi

$$\boxed{grad\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}\times rot\mathbf{B}+\mathbf{B}\times rot\mathbf{A}+\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}+\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}}. \tag{8}$$

Divergencije složenih izraza. Na osnovu definicije neposredno se vidi da je *divergencija zbira dva vektora*

$$\boxed{div\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=div\mathbf{A}+div\mathbf{B}}. \tag{9}$$

Divergencija proizvoda skalara i vektora može se pisati u obliku

$$\nabla\cdot\left(\Phi\mathbf{A}\right)=\nabla\cdot\left(\Phi^*\mathbf{A}\right)+\nabla\cdot\left(\Phi\mathbf{A}^*\right)=\left(\nabla\Phi^*\right)\cdot\mathbf{A}+\Phi\left(\nabla\cdot\mathbf{A}^*\right) \tag{10}$$

odnosno

[5] Dvostruki vektorski proizvod: $\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)=\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right)-\mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)$

$$\boxed{div\left(\Phi\mathbf{A}\right)=\mathbf{A}\cdot grad\,\Phi+\Phi\,div\mathbf{A}}. \tag{11}$$

Prema osobini za mešoviti proizvoda[6] *divergencija vektorskog proizvoda* biće

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\nabla\cdot\left(\mathbf{A}^{*}\times\mathbf{B}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}^{*}\right)=\mathbf{B}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{A}^{*}\right)-\mathbf{A}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}^{*}\right) \tag{12}$$

čime dobijamo

$$div\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{B}\cdot rot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot rot\mathbf{B}\,. \tag{13}$$

Rotori složenijih izraza. Na sličan način zaključuje se da je *rotor zbira dva vektora* jednak

$$\boxed{rot\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=rot\mathbf{A}+rot\mathbf{B}}. \tag{14}$$

Na osnovu osobine vektroskog proizvoda zbira dva vektora[7], *rotor proizvoda skalara i vektora* dovodi se u oblik

$$\nabla\times\left(\Phi\mathbf{A}\right)=\nabla\times\left(\Phi^{*}\mathbf{A}\right)+\nabla\times\left(\Phi\mathbf{A}^{*}\right)=\left(\nabla\Phi^{*}\right)\times\mathbf{A}+\Phi\left(\nabla\times\mathbf{A}^{*}\right)$$

odnosno

$$\boxed{rot\left(\Phi\mathbf{A}\right)=\Phi\,rot\mathbf{A}-\mathbf{A}\times grad\,\Phi}. \tag{15}$$

Najzad, na osnovu obrasca za dvostruki vektorski proizvod (videti fusnotu 4), *rotor vektorskog proizvoda* može se pisati kao

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)&=\nabla\times\left(\mathbf{A}^{*}\times\mathbf{B}\right)+\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}^{*}\right)=\\&=\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}^{*}-\mathbf{B}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{A}^{*}\right)+\mathbf{A}\left(\nabla\cdot\mathbf{B}^{*}\right)-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}^{*}\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\boxed{rot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}\cdot div\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot div\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}+\left(\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\mathbf{A}}. \tag{16}$$

Navedeni obrasci nam pokazuju kako se gradijent, divergencija i rotor nekog složenijeg izraza mogu svesti na prostije operacije, koje se odnose samo na pojedinačne funkcije u tom izrazu.

---

[6] Invarijantnost mešovitog proizvoda pri cikličnoj permutaciji svojih faktora:

$$\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)=\mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{C}\times\mathbf{A}\right)=\mathbf{C}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)$$

[7] $\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}+\mathbf{C}\right)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$

7. Prostorni izvodi drugog reda

Pošto su rezultati operacija gradijent, divergencija i rotor izvesne skalarne ili vektorske funkcije, od njih se takođe mogu obrazovati prostorni izvodi, koji se stoga nazivaju *prostorni izvodi drugog reda.* (Za definiciju prostornog izvoda videti fusnotu[8]).

Od gradijenta, koji je vektor, mogu se formirati divergencija i rotor: $div\, grad\, \Phi$, i $rot\, grad\, \Phi$. Od divergencije kao skalara samo gradijent $grad\, div\mathbf{A}$, dok se od rotora, koji je vektor, mogu obrazovati divergencija i rotor $div\, rot\mathbf{A}$ i $rot\, rot\mathbf{A}$. Odavde vidimo da ima pet prostornih izvoda drugog reda koji najlakše možemo naći primenom Hamiltonovog operatora imajući u vidu simboličke prikaze prostornih izvoda.

1. Divergencija gradijenta može se primenom asocijativnog zakona za skalarni proizvod, simbolički napisati u obliku

$$div\, grad\, \Phi = \nabla \cdot \left(\nabla \Phi\right) = \left(\nabla \cdot \nabla\right)\Phi, \tag{17}$$

ili kraće

$$div\, grad\, \Phi = \Delta \Phi \tag{18}$$

gde je

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \tag{19}$$

tzv. *Laplaceov operator*. Njegov eksplicitni oblik dobija se simboličkim množenjem odgovarajućih komponenata:

$$\Delta = \nabla_i \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{20}$$

odnosno, bez primene sumacione konvencije,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{21}$$

2. Rotor gradijenta izražava se na sličan način, koristeći asocijativni zakon za vektorski proizvod

$$rot\, grad\, \Phi = \nabla \times \left(\nabla \Phi\right) = \left(\nabla \times \nabla\right)\Phi, \tag{22}$$

a pošto je $\nabla \times \nabla \equiv 0$, za ma koje Φ dobijamo

$$rot\, grad\, \Phi \equiv 0. \tag{23}$$

3. Gradijent divergencije može se napisati u simboličkom obliku

---

[8] Posmatrajmo polje ma kakve fizičke veličine $\mathfrak{A}$, koja može biti skalar, vektor ili složenije prirode. Uočimo neku tačku M u tom polju i opkolimo je nekom malom zatvorenom površi ΔS, koja obuhvata zapreminu ΔV. Označimo sa $*$ neku operaciju množenja vektorom; za skalarne funkcije to je proizvod skalara i vektora, a za vektorske funkcije to može biti ili skalarni ili vektorski proizvod. Tada se granična vrednost $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} * \mathfrak{A}}{\Delta V}$, ako ona postoji i ne zavisi od načina kako ΔV teži nuli stežući se u tačku M, naziva *prostorni izvod funkcije* $\mathfrak{A}$ *u tački M u odnosu na operaciju* $*$. Na ovaj način se pomoću pojma prostornog zvoda može dati *jedinstvena definicija* gradijenta, divergencije i rotora.

$$grad\, div\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}), \tag{24}$$

a u komponentama imamo

$$grad\, div\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i . \tag{25}$$

4. Divergencija rotora iznosi, ako se primeni osobina ciklične permutacije (videti fusnotu 7)

$$div\, rot\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A}, \tag{26}$$

a pošto je $\nabla \times \nabla \equiv 0$, sledi da je za ma koje $\mathbf{A}$

$$div\, rot\mathbf{A} \equiv 0 . \tag{27}$$

5. Rotor rotora možemo transformisati, ako se primeni obrazac

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$rot\, rot\mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}, \tag{28}$$

čime dobijamo

$$rot\, rot\mathbf{A} = grad\, div\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \tag{29}$$

gde je

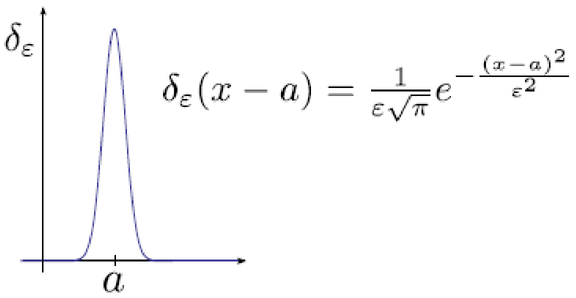
$$\Delta\mathbf{A} = (\Delta A_i)\mathbf{e}_i . \tag{30}$$

8. Diracova δ funkcija

Definicija δ funkcije. Diracova delta-funkcija može se interpretirati na sledeći način. Uočimo funkciju $\delta_\varepsilon(x-a)$ koja je zadata na sledeći način

$$\delta_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} \tag{1}$$

gde je normalizacioni faktor $1/\left(\varepsilon\sqrt{\pi}\right)$ izabran tako da važi $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x-a)dx = 1$. Grafik ove funkcije je prikazan na slici 7.



Slika 7: Funkcija $\delta_\varepsilon(x-a)$.

Maksimum funkcije $\delta_\varepsilon(x-a)$ je u tački $x=a$ i iznosu $1/\varepsilon$. Širina krive je proporcionalna sa ε. Ako se smanjuje parametar ε funkcija $\delta_\varepsilon(x-a)$ postaje sve uža i uža i sve viša i viša. Pošto je $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x-a)dx=1$, površina ispod ove krive ne zavisi od parametra ε, pa je ona jednaka jedinici i nakon limesa $\varepsilon\to 0$. Dirakova (delta) funkcija ili δ funkcija je funkcija u realnoj ravni koja predstavlja limes funkcije $\delta_\varepsilon(x-a)$ kada $\varepsilon\to 0$, tj.

$$\delta(x-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-a)=\begin{cases}0, & x\neq a\\ \infty, & x=a\end{cases} \tag{2}$$

definisana tako da važi jednakost $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx=1$. Delta funkcija $\delta(x-a)$ je svuda jednaka nuli, sem u tački $x=a$ gde je beskonačna. Ovako definisana funkcija nije funkcija u smislu kako se u matematici uvodi pojam funkcije. Stoga se ona naziva i *nesvojstvena* funkcija.

Na osnovu $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx=1$ sledi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)f(x)\,dx=f(a)\,, \tag{3}$$

za proizvoljnu funkciju $f(x)$. Iz jednakosti (3) sledi da delta funkcija izbacuje vrednost podintegralne funkcije $f(x)$ u tački $x=a$. Delta funkcija je zapravo funkcional $\delta_a : f(x)\to f(a)$. Jednakost (3) se često uzima za definiciju delta funkcije. Za $a=0$ dobija se $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\,dx=f(0)$ odnosno $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$.

Najvažnije svojstva δ funkcije. Najvažnija svojstva δ funkcije izražavaju se jednakostima:

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \tag{4}$$

$$\delta(-x)=\delta(x)\,, \tag{5}$$

$$f(x)\delta'(x-a)=-f'(x)\delta(x-a)\,, \tag{6}$$

$$\delta(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}\,, \tag{7}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{|2a|}\big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\big)\,. \tag{8}$$

U formuli (7) x_i su proste nule funkcije $f(x)$.

Trodimenzionalna δ funkcija[9]. Trodimenzionalna delta funkcija određena je relacijom

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\,. \tag{9}$$

[9] $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$ ili $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$

gde su (x, y, z) Dekartove koordinate vektora $\mathbf{r}$, a (z_0, y_0, z_0) koordinate vektora $\mathbf{r_0}$. Osnovno svojstvo funkcije $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$ je izraženo jednačinom[10]

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = f(\mathbf{r}_0) \ , \tag{10}$$

pri čemu se tačka sa radijus vektorom $\mathbf{r_0}$ nalazi u oblasti *V*, a $f(\mathbf{r})$ je neprekidna funkcija definisana u toj oblasti. Funkcija $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$ izbacuje vrednost podintegralne funkcije u tački $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$. Ako se pomenuta tačka nalazi van oblasti *V*, onda je integral (10) jednak nuli. Nekada je korisno trodimenzionalnu δ funkciju predstaviti i kao trostruki integral u $\mathbf{k}$ prostoru:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})}d\mathbf{k} \ . \tag{11}$$

Trodimenzionalna δ funkcija zadovoljava relaciju

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \ . \tag{12}$$

[10] $\int_V d^3\mathbf{r}\,\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r_0})$